Тренировочная работа №2 С3

Решите неравенство: $\dfrac{log_2(3x+2)}{log_3(2x+3)} \le 0$

Сначала ограничения.

$$\begin{cases} 3x+2>0 \\ 2x+3>0 \\ 2x+3\ne 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3} \\ x>-\dfrac{3}{2} \\ x\ne -1 \end{cases} \rightarrow x>-\dfrac{2}{3}$$

Заметим, что при $x>-\dfrac{2}{3}; \rightarrow 2x>-\dfrac{4}{3} \rightarrow 2x+3>\dfrac{5}{3} \rightarrow log_3(2x+3)>0$

Тогда получаем, что $log_2(3x+2)\le 0; \rightarrow 3x+2\le 1 \rightarrow x\le -\dfrac{1}{3}$

С учетом ограничений: $-\dfrac{2}{3}<x\le -\dfrac{1}{3}$

Ответ: $-\dfrac{2}{3}<x\le -\dfrac{1}{3}$

Тренировочная работа №3 С3

Решите неравенство:

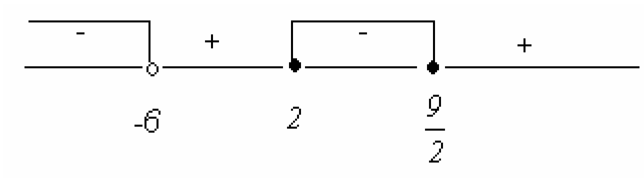
$$\frac{log_2(2x^2-13x+20)-1}{log_3(x+7)} \le 0$$

Сначала ограничения.

$$\begin{cases} 2x^2-13x+20>0 \\ x+7>0 \\ x+7\ne 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{5}{2}; \quad x>4; \\ x>-7 \\ x\ne -6 \end{cases} \rightarrow x\in(-7;-6)\cup\left(-6;\frac{5}{2}\right)\cup(4;\infty)$$

Решаем обобщенным методом интервалов.

$log_2(2x^2-13x+20)=1; \quad 2x^2-13x+18=0; \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{9}{2};2;$



С учетом ограничений получаем $x\in(-7;-6)\cup\left[2;\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(4;\dfrac{9}{2}\right]$

Ответ: $x\in(-7;-6)\cup\left[2;\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(4;\dfrac{9}{2}\right]$

Тренировочная работа №4 С3

Решите неравенство:

$$log_{0,1}(x^2+x-2)>log_{0,1}(x+3)$$

Неравенство очень простое, решим его вместе с ограничениями:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ x+3>0 \\ x^2+x-2<x+3 \end{cases} \to \begin{cases} x<-2; \quad x>1 \\ x>-3 \\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \end{cases} \to \; x\in(-\sqrt{5};-2)\cup(1;\sqrt{5})$$

Ответ: $x\in(-\sqrt{5};-2)\cup(1;\sqrt{5})$

Тренировочная работа №5 С3

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{log_2(x^2-1)}>1$$

Получаем $log_2(x^2-1)<0$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1<1 \end{cases} \to \begin{cases} x<-1; \quad x>1; \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \end{cases} \to \; x\in(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$$

Ответ: $x\in(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$

Тренировочная работа №6 С3

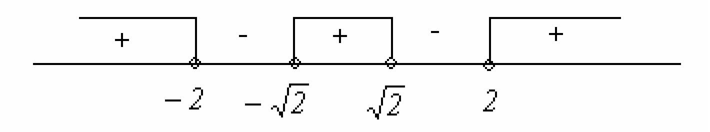
Решите неравенство:

$$\frac{x^2-4}{log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}<0$$

Преобразуем: $\dfrac{x^2-4}{log_2(x^2-1)}>0$

Сначала ограничения: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x\neq\pm\sqrt{2} \end{cases} \to \begin{cases} x<-1; \quad x>1 \\ x\neq\pm\sqrt{2} \end{cases}$

Решаем методом интервалов.



С учетом ограничений получаем $x\in(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(2;\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(2;\infty)$

Тренировочная работа №7 С3

Решите неравенство: $\log_3((x+2)(x+4))+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$

Сначала ограничения: $\begin{cases} x+2>0 \\ x+4>0 \end{cases} \rightarrow \quad x>-2$

Теперь преобразуем: $\log_3((x+2)(x+4))-\log_3(x+2)<\log_3 7$

$\log_3(x+4)<\log_3 7 \quad \rightarrow \quad x+4<7 \quad \rightarrow \quad x<3$

С учетом ограничений $-2<x<3$

Ответ: $-2<x<3$

Тренировочная работа №8 С3

Решите неравенство: $\log_2\frac{3x-2}{x-1}+3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2}<1$

Сначала ограничения: $\frac{3x-2}{x-1}>0 \quad \rightarrow \quad x<\frac{2}{3}; x>1;$

Теперь преобразуем: $\log_2\frac{3x-2}{x-1}+\log_2\frac{(x-1)^3}{3x-2}<1$

$\log_2\frac{(3x-2)(x-1)^3}{(x-1)(3x-2)}<1$

$\log_2(x-1)^2<1$

Внимание! Вот здесь тонкость – степень можно вынести из логарифма, только учтя знаки, т.е. вот так $2\log_2|x-1|<1$. Или не выносить степень вовсе.

$(x-1)^2<2 \quad \rightarrow \quad -\sqrt{2}<x-1<\sqrt{2}$

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

С учетом ограничений $x\in\left(1-\sqrt{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;1+\sqrt{2}\right)$

Ответ: $x\in\left(1-\sqrt{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;1+\sqrt{2}\right)$

Тренировочная работа №9 С3

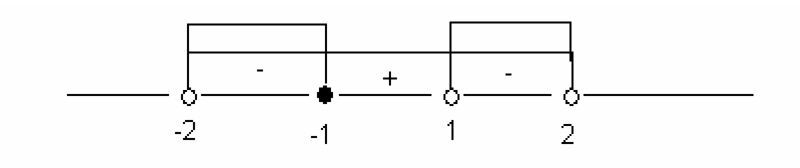
Решите неравенство: $log_{2-x}(x+2)\cdot log_{x+3}(3-x)\le 0$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 2-x>0 \\ 2-x\ne 1 \\ 3-x>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \end{cases} \to \begin{cases} x>-2 \\ x<2 \\ x<3 \\ x>-3 \\ x\ne 1 \\ x\ne -2 \end{cases} \to \begin{cases} -2<x<2 \\ x\ne 1 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство к виду:

$\dfrac{lg(x+2)lg(3-x)}{lg(2-x)lg(x+3)}\le 0$ и решим методом интервалов с учетом ограничений



Ответ: $x\in(-2;-1]\cup(1;2)$

Тренировочная работа №10 С3

Решите неравенство: $log_{x-2}(36+16x-x^2)-\dfrac{1}{16}log^2(x-18)^2\ge 2$

$$log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\,log_{x+2}(36+16x-x^2)$$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x-18\ne 0 \\ x+2>0 \\ x+2\ne 1 \\ 36+16x-x^2>0 \end{cases} \to \begin{cases} x\ne 18 \\ x>-2 \\ x\ne -1 \\ -2<x<18 \end{cases} \to x\in(-2;-1)\cup(-1;18)$$

Теперь само неравенство:

$$4\,log^2_{x+2}(18-x)+32\le 16\,log_{x+2}(18-x)+16\,log_{x+2}(x+2)$$

$$log^2_{x+2}(18-x)-4\,log_{x+2}(18-x)+4\le 0$$

$$\left(log_{x+2}(18-x)-2\right)^2\le 0$$

$$log_{x+2}(18-x)=2$$

$$18-x=x^2+4x+4$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$x=-7;2$$

С учетом ограничений $x=2$

Ответ: $x=2$

Вариант 2 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых система $\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0\\ ax\ge 4\end{cases}$ не имеет решений.

Видно, что при *a* = 0 система решений не имеет.

Рассмотрим теперь случай $a>0$.

$$\begin{cases}(x-a)\left(x-\dfrac{2a+3}{a}\right)\ge 0\\ x\ge\dfrac{4}{a}\end{cases}$$

Решением первого неравенства будет объединение двух неограниченных промежутков, поэтому второе неравенство тоже будет иметь решения, т.е. этот случай не удовлетворяет условию задачи.

Теперь второй случай $a<0$.

$$\begin{cases}(x-a)\left(x-\dfrac{2a+3}{a}\right)\le 0\\ x\le\dfrac{4}{a}\end{cases}$$

Система не будет иметь решений, если $\dfrac{4}{a}$ будет меньше наименьшего из чисел a и $\dfrac{2a+3}{a}$.

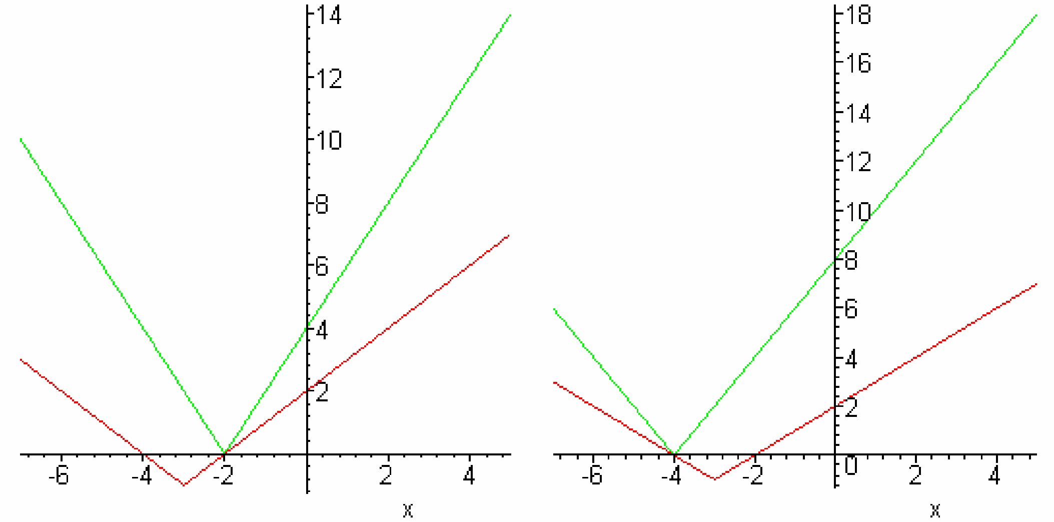
Имеем: $\begin{cases}\dfrac{4}{a}<a\\ \dfrac{4}{a}<\dfrac{2a+3}{a}\end{cases}$ $\begin{cases}a^2-4<0\\ 2a<1\end{cases}$ $a\in\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$, с учетом условия $a<0$ получаем: $a\in(-2;0)$, еще вспомним про случай a = 0.

Ответ: $a\in(-2;0]$

Вариант 3 С5

Найдите все значения *a*, такие, что уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственное решение.

Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика правой части уравнения должна находиться в точке x = -2 или x = -4.

Т.е. $\left[\begin{array}{l} -4-a=0 \\ -8-a=0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=-8 \end{array}\right.$

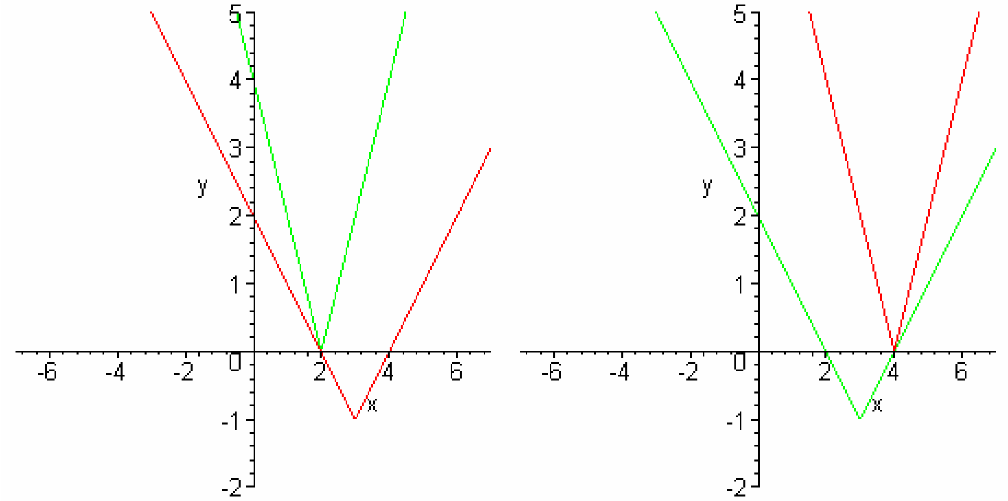
Ответ: -4 и -8

Вариант 4 С5

Найдите все значения *a*, такие, при каждом из которых уравнение $1 = |x-3| - |2x+a|$ имеет единственное решение.

$$|2x+a| = |x-3| - 1$$

Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика левой части уравнения должна находиться в точке x = 2 или x = 4.

Т.е. $\left[\begin{array}{l} 4+a=0 \\ 8+a=0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=-8 \end{array}\right.$

Ответ: -4 и -8

Вариант 5 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-3|$$

имеет хотя бы два корень.

Рассмотрим функции

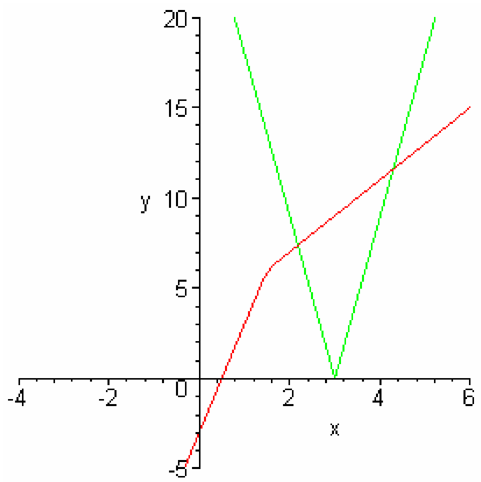
$f(x)=4x-\left|3x-|x+a|\right|$ и $g(x)=9|x-3|$

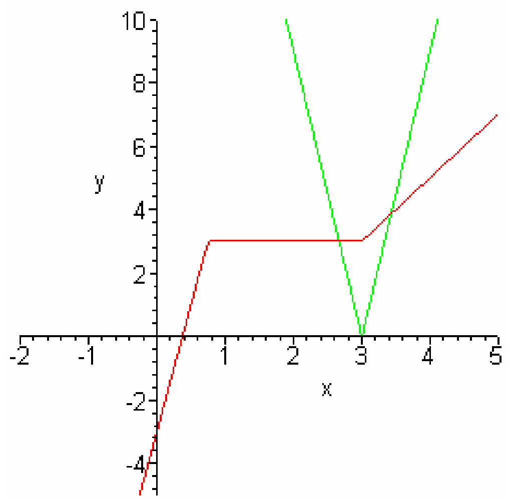
1. $x\ge -a \;\rightarrow\; f(x)=4x-|2x-a|=\begin{cases}6x-a, & x\le \dfrac{a}{2}\\ 2x+a, & x>\dfrac{a}{2}\end{cases}$

2. $x<-a \;\rightarrow\; f(x)=4x-|4x+a|=\begin{cases}8x-a, & x\le -\dfrac{a}{4}\\ -a, & x>-\dfrac{a}{4}\end{cases}$

Заметим, что угловой коэффициент ломаной $g(x)$ равен 9 или -9, а ломаной $f(x)$ 2, 6 или 8 при $a>0$ и 0, 8 и 2 при $a<0$

На первом рисунке $a>0$, на втором - $a<0$





Для выполнения условия задачи необходимо:

$$f(3)=12-\left|9-|a+3|\right|>0$$

$$\left|9-|a+3|\right|<12 \;\rightarrow\; -12<9-|a+3|<12 \;\rightarrow\; -3<|a+3|<21$$

$$-21<a+3<21 \;\rightarrow\; -24<a<18$$

Ответ: $-24<a<18$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 6 C5

Найти все значения *a*, такие, что наименьшее значение функции

$$|x^2-(1+a)x+a|+(a-1)|x+1| \text{ меньше 2.}$$

$$f(x)=|x^2-(1+a)x+a|+(a-1)|x+1|=|x^2-x-ax+a|+(a-1)|x+1|=$$
$$=|(x-1)(x-a)|+(a-1)|x+1|$$

Возможные варианты раскрытия модулей:

$f(x)=x^2-x-ax+a+ax+a-x-1=x^2-2x+2a-1$

$f(x)=x^2-x-ax+a-ax-a+x+1=x^2-2ax+1$

$f(x)=-x^2+x+ax-a+ax+a-x-1=-x^2+2ax-1$

$f(x)=-x^2+x+ax-a-ax-a+x+1=-x^2+2x-2a+1$

Наименьшее значение может быть либо в граничных точках $x=1, x=a, x=-1$, либо в вершинах парабол, т.е. опять же при $x=1$ или $x=a$.

$$\left[\begin{array}{l} f(1)<2 \\ f(-1)<2 \\ f(a)<2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2(a-1)<2 \\ 2|1+a|<2 \\ (a-1)|a+1|<2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a<2 \\ -1<a+1<1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-1<2 \\ a>-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-1>-2 \\ a<-1 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a<2 \\ -2<a<0 \\ -1<a<\sqrt{3} \\ a<-1 \end{array}\right. \rightarrow \quad a<2$$

Итого $a<2$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 7 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых из неравенства $0 \le x \le 1$ следует неравенство $\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2 \le 0.$

По условию задачи все решения первого неравенства должны быть решениями второго.

Обозначим $f(x) = \left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$

Сначала рассмотрим случай, если ветви параболы направлены вверх:

$$\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f(1) \le 0 \\ a^2 + a - 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \le 0 \\ a^2 + a - 2 - a - 5 - 2 \le 0 \\ a < -2;\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 9 \le 0 \\ a < -2;\ a > 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad a \in [-3;-2) \cup (1;3]$$

Если ветви параболы направлены вниз $a \in (-2;1)$.

Заметим, что $f(0) = -2 < 0$.

Кроме того, $D = (a+5)^2 + 8(a^2 + a - 2) = 9a^2 + 18a + 9 = 9(a+1)^2$

Нули функции $f(x)$:

$$x_{1,2} = \frac{a+5+3a+3}{2(a-1)(a+2)}; \frac{a+5-3a-3}{2(a-1)(a+2)} = \frac{2}{(a-1)}; -\frac{1}{(a+2)}$$

При $a \in (-2;1)$ оба корня отрицательные, таким образом, отрезок $0 \le x \le 1$ целиком попадает на промежуток отрицательных значений функции $f(x)$, т.е. условие задачи выполняется на промежутке $a \in (-2;1)$.

Теперь рассмотрим случай $a^2 + a - 2 = 0 \quad a = -2;1$

Имеем $-3x - 2 \le 0; \quad -6x - 2 \le 0;$

$x \ge -\dfrac{2}{3}; \quad x \ge -\dfrac{1}{3}$ - условие задачи выполнено

Ответ: $a \in [-3;3]$

aalleexx

Вариант 8 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно 10 решений.

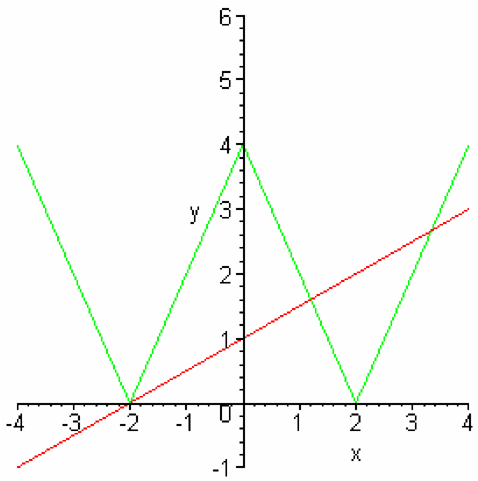
$$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n \quad n\in Z$$
$$a^2-x^2=4\pi^2n^2 \quad n\in Z$$
$$x^2=a^2-4\pi^2n^2 \quad n\in Z$$
$$x^2=a^2-4\pi^2n^2=a^2;a^2-4\pi^2;a^2-16\pi^2;a^2-36\pi^2;a^2-64\pi^2 - \text{должны}$$
$$\text{давать десять искомых корней}$$
$$\text{Необходимо чтобы} \quad a^2-64\pi^2>0, a^2-100\pi^2<0$$
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>8\pi\\ a<-8\pi\end{array}\right.\\ -10\pi<a<10\pi\end{cases} \Rightarrow a\in(-10\pi;-8\pi)\cup(8\pi;10\pi)$$

Ответ: $a\in(-10\pi;-8\pi)\cup(8\pi;10\pi)$

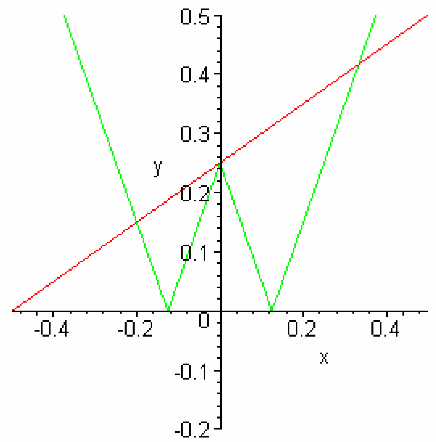
Вариант 9 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет три различных корня.

$\left|2|x|-a^2\right|=\frac{x}{2}-\frac{a}{2}$ - решать будем графически



$a=-2$



$a=-\frac{1}{2}$

Для выполнения условия задачи значения левой и правой части должны быть равны при $x=0$ и $x=-\frac{a^2}{2}$;

$$\begin{cases} a^2=-\frac{a}{2} \\ -\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=0; a=-\frac{1}{2} \\ a=0; a=-2 \end{cases}$$

При $a=0$ условие не выполняется.

Ответ: $a=-2$; $a=-\frac{1}{2}$.

http://alexlarin.narod.ru

Вариант №10 С5

Найти все значения *a*, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x)=\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$$ лежит на интервале (-3;3).

$-3<\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3$, заметим, что $x^2+x+1>0$ при любом *x*.

Получаем:

$$\begin{cases}\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3\\ \frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}>-3\end{cases}\to\begin{cases}x^2-ax+1<3x^2+3x+3\\ x^2-ax+1>-3x^2-3x-3\end{cases}\to\begin{cases}3x^2+(3+a)x+2>0\\ 4x^2+(3-a)x+4>0\end{cases}$$

Т.к. неравенства должны выполняться при любом *x*, получаем:

$$\begin{cases}(3+a)^2-16<0\\ (3-a)^2-64<0\end{cases}\to\begin{cases}-4<3+a<4\\ -8<3-a<8\end{cases}\to\begin{cases}-7<a<1\\ -5<a<11\end{cases}\to a\in(-5;1)$$

Ответ: $a\in(-5;1)$